

Matematička analiza 1 - 13. auditorna vježba - 13.11.2023.

Zadatak 1 Za funkciju $y = y(x)$ zadanu parametarski sa

$$\begin{cases} x(t) = t + \ln t \\ y(t) = t^2 + \ln(2t) \end{cases}$$

odredite $y'(x)$ i $y''(x)$ u točki T za koju je $t = 1$.

Zadatak 2 Nađite jednadžbu tangente i normale u točki $T(x_0, y_0)$ za koju je $t = \pi/4$ na funkciju $y = y(x)$ zadanu parametarski sa

$$x(t) = 8(\cos t + t \sin t), \quad y(t) = 8(\sin t - t \cos t).$$

Zadatak 3 Za svaku od sljedećih tvrdnji ispitajte je li istinita. Ako jest, dokažite je, a u suprotnom navedite protuprimjer.

(T1) Ako diferencijabilna funkcija f ima lokalni maksimum u točki a , onda vrijedi $f'(a) = 0$.

(T2) Ako je f diferencijabilna funkcija i $f'(a) = 0$, onda f ima lokalni ekstrem u točki a .

(T3) Ako neprekinuta funkcija f ima lokalni maksimum u točki a , onda vrijedi $f'(a) = 0$.

Zadatak 4 Automobil krene u 6 sati ujutro autocestom iz Splita prema Zagrebu. Na naplatne kućice Lučko stigne točno u 9 sati pri čemu prijeđe put od 410 km. Tamo ga uz cestarinu dočeka i kazna zbog vožnje brže od 130 km/h.

(a) Koji teorem garantira da je automobil ustinu u nekom trenutku vozio brže od dopuštenog?

(b) Ako pretpostavimo da

$$f(t) = 410 \left(\frac{t^2}{3} - \frac{2t^3}{27} \right)$$

izražava udaljenost (u kilometrima) automobila od Splita kao funkciju vremena (u satima) proteklog od polaska, pronađite trenutak $c \in \langle 0, 3 \rangle$ takav da je $f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$.

Zadatak 5 (*) Pokažite da funkcija $f(x) = 20x - e^{-4x}$ ima točno jednu realnu nultočku. (UPUTA: Prvo izračunajte $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ i koristeći teorem o međuvrijednostima zaključite da postoji jedna nultočka. Zatim koristeći Rolleov teorem pokažite da je to i jedina nultočka.)